

Открытая лицейская олимпиада по математике 2018.

Решения.

5 класс

1. **Вычислить:** $(2+4+6+\dots+2018) - (1+3+5+\dots+2017)$

Решение.

$$(2+4+6+\dots+2018) - (1+3+5+\dots+2017) = (2-1)+(4-3)+\dots+(2018-2017)=1*1009=1009$$

(Перегруппируем слагаемые в пары, каждая разность равна 1, и таких пар 1009).

Критерии проверки

	Продвижение в решении	баллы
1	Верное решение с группировкой слагаемых и верный ответ	7
2	Верное решение с вычислением каждой суммы в скобках, возможно, с применением метода Гаусса, и верный ответ	4-5
3	Использована идея перегруппировки слагаемых, но допущена вычислительная ошибка	1-3
4	Верный ответ без решения	0

2. **Найдётся ли пять натуральных чисел (не обязательно различных) таких, что их сумма была бы равна их произведению?**

Решение.

В большинстве случаев произведение натуральных чисел больше их суммы, но выручает единица. При умножении на единицу число не меняется, а при сложении с единицей – увеличивается. Значит, остается подобрать два числа не равных единице, произведение которых на три больше их суммы, а ещё три места занять единицами.

Ответ: Да, например: $2*5*1*1*1=10$ и $2+5+1+1+1=10$

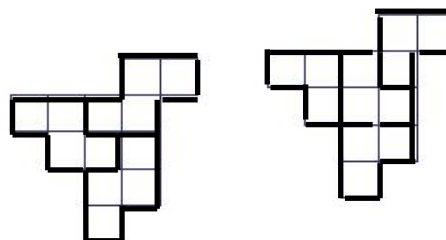
Критерии проверки

	Продвижение в решении	баллы
1	Верный пример даже без объяснений	7
2	Использована идея применения единицы, но допущена вычислительная ошибка, например, получилось не 5 а 6 или 7 таких чисел, что сумма равна произведению	3-5
3	Любое количество примеров, в которых сумма пяти чисел не равна их произведению, неверный вывод	0

3. **Разрежьте фигуру а) на три равные части,**

б) на четыре равные части.

Решение. См. рисунок.



Критерии проверки

	Продвижение в решении	баллы
1	Показаны линии разрезов для случаев а) и б)	7
2	Показаны линии разрезов для случая а)	4
3	Показаны линии разрезов для случая б)	3
4	Линии разрезов не соответствуют условию, нет линий	0

4. *Катя, Соня, Галя и Оля родились 2 марта, 17 мая, 2 июля и 20 марта. Соня и Галя родились в одном месяце, а у Гали и Кати дни рождения обозначаются одинаковыми числами. Определите дни рождения всех девочек.*

Решение.

1. Соня и Галя родились в марте, так как только в марте два дня рождения.
2. Галя и Катя родились 2-го числа, так как только 2-е число – дата двух дней рождения.
3. Из (1) и (2) следует, что Галя родилась 2 марта.
4. Далее получается, что Соня родилась 20 марта – в том же месяце, что и Галя.
5. Катя родилась 2 июля – того же числа, что и Галя.
6. Оля родилась 17 мая.

Ответ: Галя -2 марта, Соня -20 марта, Катя – 2 июля, Оля -17 мая.

Критерии проверки

	Продвижение в решении	баллы
1	Верные рассуждения, верный ответ.	7
2	Верный ответ без объяснений	3-4
3	Неверный ответ, ошибка в рассуждениях	0

5. *В вазе 11 конфет. Маша и Витя играют в «Жадину»: Каждый по очереди может взять из вазы 1, 2 или 3 конфеты. Проигрывает тот, кто возьмёт последнюю конфету – он «жадина». Начинает Маша. Кто из ребят может обеспечить себе победу?*

Решение.

1. После последнего хода победителя должна остаться одна конфета.
2. Второй игрок всегда может дополнить количество взятых за один круг конфет до четырех: Если первый берёт одну, второй – три, если первый берёт две, второй - тоже две, если первый берёт три конфеты, второй – одну.
3. $11=1+4+4+2$, значит, Маше нужно первым ходом взять две конфеты, а затем дополнять количество взятых Витей конфет до четырех. Тогда в конце Вите придётся взять последнюю конфету.

Ответ: Маша может обеспечить себе победу при любой игре Вити.

Критерии проверки

	Продвижение в решении	баллы
1	Верные рассуждения, верный ответ.	7
2	Верный ответ без объяснений, или верный ход логических рассуждений, но не доведенных до конца	4-5
3	Неверный ответ, ошибка в рассуждениях	0

1. Расшифруйте ребус: УМ+ШУМ=ФМШ

Решение.

$74+874=948$ или $62+462=524$ или $87+487=574$

Критерии проверки

	Продвижение в решении	баллы
1	Любое верное решение даже без объяснений.	5
2	Больше одного решения даже без объяснений	7
3	Неверный ответ, ошибка в рассуждениях	0

2. Найдётся ли десять натуральных чисел (не обязательно различных) таких, что их сумма была бы равна их произведению?

Решение.

В большинстве случаев произведение натуральных чисел больше их суммы, но выручает единица. При умножении на единицу число не меняется, а при сложении с единицей – увеличивается. Значит, остается подобрать два числа не равных единице, произведение которых на восемь больше их суммы, а ещё восемь мест занять единицами.

**Ответ: Да, например: $2 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 20$ и $2 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20$
 $4 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 16$ и $4 + 4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 16$**

Критерии проверки

	Продвижение в решении	баллы
1	Верный пример даже без объяснений	7
2	Использована идея применения единицы, но допущена вычислительная ошибка, например, получилось не 10, а 8 или 9 таких чисел, что сумма равна произведению	2-4
3	Любое количество примеров, в которых сумма десяти чисел не равна их произведению, неверный вывод	0

3. На день рождения пришло двенадцать детей следующих возрастов: 6 лет, 7 лет, 8 лет, 9 лет и 10 лет, причем четырем детям было по 6 лет, а восьмилетних было больше всех. Вычислите их средний возраст.

Решение.

1. Так как число детей младшего возраста равно 4, то число восьмилетних может быть не менее 5.
2. Если их больше 5, то шести и восьмилетних будет больше 9. Тогда на детей возрастов 7 лет, 9 лет и 10 лет останется в сумме только или 1 год или 2 года. Этого быть не может. Значит восьмилетних детей ровно 5 человек.
3. Остаток от 12 составит 3 ребенка. Их надо распределить между возрастaми 7 лет, 9 лет и 10 лет. Легко понять, что их ровно по одному человеку.
4. Получаем следующий расклад: 6 лет — 4 человека; 7 лет — 1 человек; 8 лет — 5 человек; 9 лет — 1 человек; 10 лет — 1 человек.

Найдем теперь средний возраст — среднее арифметическое имеющихся возрастов:

$$(6 \cdot 4 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 1 + 10 \cdot 1) / 12 = 7,5$$

Ответ: 7,5 лет.

Критерии проверки

	Продвижение в решении	баллы
1	Верное решение с правильными рассуждениями по количеству детей каждого возраста, верный ответ.	7
2	Верное решение без объяснений как определить количество детей каждого возраста, верный ответ	5
3	правильные рассуждениями по количеству детей каждого возраста, неверное вычисление среднего арифметического, неверный ответ.	2-3
4	Верный ответ без решения, неверный ответ	0

4. Двумя прямыми разрежьте треугольник на два треугольника, четырёхугольник и пятиугольник.

Критерии проверки

	Продвижение в решении	баллы
1	Верный рисунок.	7
3	Неверный рисунок	0

4. У трёх друзей один велосипед. Смогут ли они за три часа преодолеть 21 километр, если пешком скорость каждого 5 км/ч, скорость велосипедиста с пассажиром 10 км/ч, а скорость велосипедиста без груза на багажнике 15 км/ч.

Решение.

- Первый и второй едут на велосипеде 12 км, а третий идет пешком. На это потратят $12:10=1,2$ часа. Третий за это время пройдёт 6 км.
- Первый ссаживает второго с велосипеда и возвращается за третьим. Второй идёт пешком, и за оставшееся время $3-1,2=1,8$ часа пройдёт $1,8*5=9$ км. Второй успел ($12+9=21$ км)
- Первый едет навстречу третьему, оставшему на 6 км. Скорость их сближения $15+5=20$ км/ч. Они встретятся через $6:20=0,3$ часа. Осталось $3-(1,2+0,3)=1,5$ часа. Третий за 0,3 часа пройдёт ещё $5*0,3=1,5$ км.
- Первый берёт третьего на багажник и едет к финишу со скоростью 10 км/ч. Им осталось проехать $21-(6+1,5)=21-7,5=13,5$ км, а за 1,5 часа они проедут $10*1,5=15$ км.

Ответ: смогут.

Критерии проверки

	Продвижение в решении	баллы
1	Верное решение.	7
2	Описана стратегия перемещений, но допущена вычислительная ошибка в решении	3-4
3	Описана стратегия перемещений без расчётов	1-2
4	Неверное решение, неверный вывод	0

6. По кругу стоят 16 корзин. Можно ли разложить в них 55 арбузов так, чтобы количество арбузов в соседних корзинах отличалось ровно на один? Объяснить.

Решение.

Невозможно. Если количество арбузов в соседних корзинах отличается на 1, то в восьми корзинах чётное число арбузов и в восьми нечётное. Сумма восьми чётных чисел чётна, сумма восьми нечётных чисел тоже чётна, значит 55 арбузов так не разложить. **Ответ: невозможно.**

Критерии проверки

	Продвижение в решении	баллы
1	Верное решение.	7
2	Описана стратегия перемещений, но допущена вычислительная ошибка в решении	3-4
3	Описана стратегия перемещений без расчётов	1-2
4	Неверное решение, неверный вывод	0